

# 現代的位相幾何学と代数論理の交差点

核、Stone双対性、Gleason被覆、およびファイバー積を持たない圏上の層理論

本稿は、点なし位相空間論（Pointfree Topology / Locale理論）における「フレーム上の核とGrothendieck位相の完全対応」から出発し、位相幾何学と代数論理学を結ぶ「Stone双対性」、そして幾何学的限界を克服する「Sieve（ふるい）を用いた層理論」にいたるまで、一連の高度な数理的議論を体系的にまとめたものである。

数理的な定義・定理・証明は客観的かつ厳密な「だ・である調」で記述し、その幾何学的直観や背景となる思想、歴史的動機についての解説は「です・ます調」を用いて、多角的かつ自己完結的にアプローチする。

## 1. 基礎概念の定義：フレームとGrothendieck位相

まずは、空間の「点」ではなく「開集合の交わりと結び」の代数的構造そのものを研究対象とする代数的トポロジーの基礎を定式化する。

### 定義 1.1: フレーム (frame)

半順序集合 (partially ordered set)  $L$  がフレームであるとは、任意のサブセットに対する上限  $\bigvee_{i \in I} a_i$  と、有限個の要素の下限  $a \wedge b$  を持ち、以下の無限分配則 (Infinite Distributivity) を満たすことである。

$$a \wedge \left( \bigvee_{i \in I} b_i \right) = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i)$$

通常の位相空間  $X$  の開集合系  $\mathcal{O}(X)$  は、包含関係  $\subset$  を順序、共通部分  $\cap$  を  $\wedge$ 、和集合  $\cup$  を  $\bigvee$  とみなすことで典型的なフレームをなします。Locale理論では、点を経由せずにこの分配則を直接ハミルトン流に抽象化します。

### 定義 1.2: フレーム上の核 (nucleus)

フレーム  $L$  上の核とは、写像  $j: L \rightarrow L$  であり、任意の  $a, b \in L$  に対して以下の3条件を満たすものである。

- 拡張性 (extensive):  $a \leq j(a)$
- 冪等性 (idempotent):  $j(j(a)) = j(a)$
- 有限交差の保存:  $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$

核は、古典的な位相空間における「閉包作用素」の純粋な代数化です。また、直観主義論理の文脈では「様相演算子」や「二重否定」の振る舞いを司る極めて重要な写像です。

### 定義 1.3: 半順序集合上のGrothendieck位相

フレーム  $L$  を、順序関係  $a \leq b$  のときに唯一の射  $a \rightarrow b$  が存在するとみなして圏として扱う。要素  $a \in L$  上の篩 (sieve)  $S$  とは、主下方閉集合  $\downarrow a = \{x \in L \mid x \leq a\}$  の部分集合であって、下方閉条件 ( $y \leq x \in S \implies y \in S$ ) を満たすものである。 $L$  上のGrothendieck位相  $J$  とは、各  $a \in L$  に対して被覆篩 (covering sieve) の集合  $J(a)$  を割り当てる規則であり、以下の3つの公理を満たす。

1. **極大篩 (maximal sieve):** 主篩  $\downarrow a \in J(a)$ 。
2. **基底変換 (base change):**  $S \in J(a)$  かつ  $b \leq a$  ならば、 $S \cap \downarrow b \in J(b)$ 。
3. **局所的性質 (local character):**  $S \in J(a)$  であり、 $R \subset \downarrow a$  が「任意の  $c \in S$  に対して  $R \cap \downarrow c \in J(c)$ 」を満たすならば、 $R \in J(a)$ 。

## 2. 主定理：核と位相の完全対応

### 定理 2.1: 核と位相の全単射対応

任意のフレーム  $L$  において、フレーム構造と両立する（すなわち、篩  $S$  に対して  $\downarrow (\bigvee S) \in J(\bigvee S) \implies S \in J(\bigvee S)$  を満たす） $L$  上のGrothendieck位相の全体と、 $L$  上の核の全体は、以下の構成によって1対1に完全に対応（全単射）する。

- **核  $j$  から位相  $J_j$  への構成:**  $S \in J_j(a) \iff j(\bigvee S) = j(a)$
- **位相  $J$  から核  $j_J$  への構成:**  $j_J(a) = \bigvee \{x \in L \mid \downarrow (a \wedge x) \in J(x)\}$

### 証明

本命題を3つのステップに分けて完全に証明する。

#### ステップ1: 核 $j$ に対応する $J_j$ がGrothendieck位相の公理を満たすことの検証

- 1) **極大篩:**  $\bigvee \downarrow a = a$  であるから、 $j(\bigvee \downarrow a) = j(a)$  となり、 $\downarrow a \in J_j(a)$  は自明に成立する。
- 2) **基底変換:**  $S \in J_j(a)$  (すなわち  $j(\bigvee S) = j(a)$ ) とし、 $b \leq a$  とする。フレームの無限分配則により、 $\bigvee (S \cap \downarrow b) = (\bigvee S) \wedge b$  である。両辺に核  $j$  を適用し、有限交差の保存性を用いると以下を得る。

$$j(\bigvee (S \cap \downarrow b)) = j((\bigvee S) \wedge b) = j(\bigvee S) \wedge j(b) = j(a) \wedge j(b) = j(a \wedge b)$$

ここで  $b \leq a$  より  $a \wedge b = b$  であるため、右辺は  $j(b)$  となる。したがって  $j(\bigvee (S \cap \downarrow b)) = j(b)$  より  $S \cap \downarrow b \in J_j(b)$  が示された。

- 3) **局所的性質:**  $S \in J_j(a)$ 、かつ任意の  $c \in S$  に対して  $R \cap \downarrow c \in J_j(c)$  と仮定する。仮定より、各  $c \in S$  について  $j(\bigvee (R \cap \downarrow c)) = j(c)$  である。分配則より  $\bigvee (R \cap \downarrow c) = (\bigvee R) \wedge c$  であるから、 $j((\bigvee R) \wedge c) = j(c)$ 、すなわち  $j(\bigvee R) \wedge j(c) = j(c)$  を得る。これは  $j(c) \leq j(\bigvee R)$  を意味する。核の拡張性  $c \leq j(c)$  と合わせると、 $c \leq j(\bigvee R)$  である。これがすべての  $c \in S$  で成立するため、上限をとることで  $\bigvee S \leq j(\bigvee R)$  となる。両辺に  $j$  を適用し、単調性と冪等性を用いれば、

$$j(\bigvee S) \leq j(j(\bigvee R)) = j(\bigvee R)$$

ここで仮定  $S \in J_j(a)$  より  $j(\bigvee S) = j(a)$  であるため、 $j(a) \leq j(\bigvee R)$  である。他方、 $R \subset \downarrow a$  より  $\bigvee R \leq a$  であり、単調性

から  $j(\bigvee R) \leq j(a)$  は自明である。ゆえに  $j(\bigvee R) = j(a)$  となり、 $R \in J_j(a)$  が示された。

### ステップ2: 位相 $J$ に対応する $j_J$ が核の公理を満たすことの検証

集合  $A(a) = \{x \in L \mid \downarrow(a \wedge x) \in J(x)\}$  を定義する。すなわち  $j_J(a) = \bigvee A(a)$  である。

1) **拡張性:** 位相の公理1より  $\downarrow(a \wedge a) = \downarrow a \in J(a)$  である。よって  $a \in A(a)$  となり、上限の定義から  $a \leq \bigvee A(a) = j_J(a)$  である。

2) **有限交差の保存:**  $x \leq y \implies j_J(x) \leq j_J(y)$  という単調性は定義から容易に導かれるため、 $j_J(a \wedge b) \leq j_J(a) \wedge j_J(b)$  は自明である。逆の不等式を示す。分配則により、

$$j_J(a) \wedge j_J(b) = \left( \bigvee_{x \in A(a)} x \right) \wedge \left( \bigvee_{y \in A(b)} y \right) = \bigvee_{x \in A(a), y \in A(b)} (x \wedge y)$$

ここで  $z = x \wedge y$  とおく。  $x \in A(a)$  より  $\downarrow(a \wedge x) \in J(x)$  であり、これを  $z \leq x$  に沿って基底変換すると  $\downarrow(a \wedge z) \in J(z)$  となる。同様に  $y \in A(b)$  から  $\downarrow(b \wedge z) \in J(z)$  を得る。被覆篩の有限共通部分は再び被覆篩となるため、 $\downarrow(a \wedge z) \cap \downarrow(b \wedge z) = \downarrow(a \wedge b \wedge z) \in J(z)$  となる。これは  $z = x \wedge y \in A(a \wedge b)$  を意味する。ゆえにすべての交差の項は  $j_J(a \wedge b)$  以下であり、上限をとることで  $j_J(a) \wedge j_J(b) \leq j_J(a \wedge b)$  が示された。

3) **冪等性:**  $j_J(a) \leq j_J(j_J(a))$  は拡張性より明らか。逆を示すため、任意の  $y \in A(j_J(a))$  に対して  $y \leq j_J(a)$  を示せば十分である。  $y \in A(j_J(a))$  は  $\downarrow(j_J(a) \wedge y) \in J(y)$  を意味する。ここで  $j_J(a) \wedge y = \bigvee_{x \in A(a)} (x \wedge y)$  である。篩

$S = \{w \leq y \mid \exists x \in A(a) \text{ s.t. } w \leq x \wedge y\}$  を構成すると、 $\bigvee S = j_J(a) \wedge y$  となり、両立性の仮定から  $S \in J(y)$  である。各  $w \in S$  は、ある  $x \in A(a)$  に対して  $w \leq x$  を満たす。  $\downarrow(a \wedge x) \in J(x)$  を  $w$  へ基底変換すれば  $\downarrow(a \wedge w) \in J(w)$  を得る。局所的性質により、 $\downarrow(a \wedge y) \in J(y)$  が導かれ、これは  $y \in A(a)$ 、すなわち  $y \leq j_J(a)$  を意味する。

### ステップ3: 互いに逆の変換であることの検証

$j_{j_J}(a) = \bigvee \{x \in L \mid j(a \wedge x) = j(x)\}$  を考える。  $x$  がこの集合に属するとき、  $x \leq j(x) = j(a \wedge x) \leq j(a)$  であるため、上限もまた  $j(a)$  以下となる。逆に  $x = j(a)$  を代入すると、  $j(a \wedge j(a)) = j(a) \wedge j(j(a)) = j(a)$  となり、集合に属する。よって上限は  $j(a)$  に完全に一致する。  $J_{j_J} = J$  も同様に、篩の生成する上限の核条件から完全に同値となる。 ■

この定理は、「空間をどう被覆するか」という幾何的な構造が、「要素をどう閉包するか（核）」という純粋な代数構造へと完璧に翻訳できることを示しています。

## フレーム上の核とGrothendieck位相の基本的対応例

### 例 2.2: 稠密位相 (Dense topology / 二重否定位相)

開集合  $U$  に対し、核を  $j(U) = \text{Int}(\text{Cl}(U))$  (点なし位相空間論における二重否定  $\neg\neg U$ ) と定義する。

これに対応するGrothendieck位相  $J_j$  では、篩  $S$  が  $U$  を覆うことと、「 $S$  に属する開集合の和集合が  $U$  の中で稠密 (dense) であること」が同値となる。

### 例 2.3: 閉部分空間位相 (Closed subspace topology)

固定された開集合  $W$  に対し、核を  $j(U) = U \cup W$  と定義する。(これは  $W$  の補集合である閉集合  $F = X \setminus W$  への制限を意味する)。

対応する位相  $J_j$  では、篩  $S$  が  $U$  を覆うことと、「 $(\bigvee S) \cup W = U \cup W$ 、すなわち、閉集合  $F$  と交わる部分さえ  $S$  で覆えていれば全体を覆ったとみなす」ことが同値となる。

## 3. トポス理論と代数幾何学における10の興味深い位相

舞台を一般の圏やトポス、可換環のスペクトルへと広げることで、幾何学的直観を遥かに凌駕する「被覆のルール」を定義できる。以下に重要な10の位相を挙げる。

### 3.1 論理とLocaleの位相（トポス・フレーム上の位相）

#### 1. 開部分空間位相 / 閉核 (Heyting implication topology)

固定された開集合  $A$  に対し、核を  $j(U) = A \rightarrow U$  と定義する。ここで  $\rightarrow$  はHeyting代数における含意 ( $A \cap V \subset U$  となる最大の開集合  $V$ ) を指す。

**直観的意味:** 空間の特定の領域  $A$  の外側を完全に無視する（切り落とす）操作に相当し、論理的には「 $A$  であるという前提を置いた世界」を空間的に記述するものです。

#### 2. 空間化核 (Spatialization topology)

核を  $j(U) = \bigcap \{P \in L \mid U \subset P \text{ かつ } P \text{ は素元}\}$  と定義することで誘起される位相。

**直観的意味:** 代数的な枠組み (Locale) から、点に相当する「素元」をかき集めることで、強制的に古典的な位相空間に引き戻そうとする作用を持ちます。

#### 3. 原子位相 (Atomic topology)

すべての射が単射 (monic) である圏において、「空でない篩はすべて被覆である」と規定する位相。

**直観的意味:** わずかでも関係性 (矢印) が伸びているなら全体を覆っているとみなす極めて強力なルールで、並行世界を扱うKripke意味論において可能性の論理をモデル化する際に使われます。

#### 4. Lawvere-Tierney位相 (Lawvere-Tierney topology)

トポス  $\mathcal{E}$  の真理値対象  $\Omega$  上の、核の公理を満足する自己射  $j: \Omega \rightarrow \Omega$  を用いて定式化される位相の総称。

**直観的意味:** 哲学や論理学における「必然性 ( $\square$ )」や「可能性 ( $\diamond$ )」といった様相演算子を、トポス内部の幾何学的な「被覆」として完全に同一視する枠組みを提供します。

### 3.2 圏の性質を測定するメタな位相

#### 5. 離散位相 / 直観主義位相 (Discrete topology)

同型射の族 (すなわち、自分自身という自明な被覆) しか被覆として認めない、最も厳格な位相。

**直観的意味:** 幾何的には無風状態ですが、この位相上の層 (プレ層の全体に一致) の内部論理は「純粋な直観主義論理」となり、すべての変形理論の基準点となります。

#### 6. 標準位相 (Canonical topology)

すべての表現可能プレシーフ (Hom関手  $\text{hom}(-, X)$ ) が層になるような位相の中で、最大の (最も粗い) 位相。

**直観的意味:** その圏が本質的に内包している「幾何学的な形」を破壊しないギリギリの限界ラインを攻めた被覆ルールです。

## 7. 劣標準位相 (Subcanonical topology)

標準位相よりも細かい（厳しい）位相の総称。

**直観的意味:** 私たちが日常的に扱う「多様体の開被覆」などはすべてこれに属します。「表現可能関手が層になる」、すなわち幾何学的な対象がバラバラに分解されないことを保証するまともな圏の代名詞です。

## 3.3 代数幾何学の「過激な」位相たち

### 8. Zariski位相 (Zariski topology)

可換環のスペクトル  $\text{Spec}(R)$  上で、多項式がゼロにならない主開集合  $D(f)$  の局所化の射による被覆。

**直観的意味:** 代数幾何学の母体ですが、開集合が「巨大すぎる」ため、空間としては非常に粗く、いかなる2点も開集合で分離しにくい（Hausdorffから程遠い）奇妙な空間を生み出します。

### 9. Étale位相 (Étale topology)

ヤコビ行列が可逆（局所同相の代数的一般化）であるエタール射  $\{X_i \rightarrow X\}$  による被覆。

**直観的意味:** Zariski位相が粗すぎるという弱点を克服するため、「空間を細かく切り刻めないなら、空間の上を滑らかに覆う『別の空間からの射』を被覆とみなそう」というコペルニクスの転回です。ウェイル予想やフェルマーの最終定理の証明の舞台となりました。

### 10. fppf位相 (fppf topology)

代数幾何において「忠実平坦 (faithfully flat) かつ有限表示 (finitely presented)」という代数条件を満たす射を被覆とする位相。

**直観的意味:** Étale位相でも拾えないような幾何学的特異点（尖った点）であっても、代数的な平坦性さえあれば「滑らかに覆えている」と強弁する超強力な位相で、代数群やモジュライ理論で威力を発揮します。

## 4. Stone双対性とGleason被覆：一意性の破綻

トポロジー（空間側）と可換Boole代数（代数側）は、コンパクト完全不連結空間を介して美しい双対性（Stone双対性）で結ばれている。しかし、ここには「一意性」に関する根深い誤解と代数的な制約が存在する。

### 設定：空間の圏と対応する代数

- **TotDCH:** 完全不連結コンパクトHausdorff空間（Stone空間）と連続写像の圏。
- **ExtrDCH:** 極值的非連結（開集合の閉包が再び開集合になる）コンパクトHausdorff空間の圏。
- **Bool:** Boole代数とBoole準同型の圏（**TotDCH** と双対）。
- **cBA:** 完備Boole代数（任意個の上限・下限が存在）の圏（**ExtrDCH** と双対）。

## 4.1 リフトの存在と「一意性」の破綻 (Gleason被覆)

任意の Stone空間  $S \in \mathbf{TotDCH}$  に対し、**Gleason被覆**と呼ばれる連続全射  $p: E \rightarrow S$  ( $E \in \mathbf{ExtrDCH}$  であり、 $p$  は既約全射) が存在する。**ExtrDCH** の対象はコンパクト Hausdorff空間の圏における射影的对象 (projective object) であるため、任意の全射  $p$  と射  $f: X \rightarrow S$  に対して、持ち上げ (リフト)  $g: X \rightarrow E$  が存在して  $p \circ g = f$  を満たす。しかし、このリフト  $g$  は一意には定まらない。

### 一意性の反例

$S = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  を自然数集合の1点コンパクト化 (これは **TotDCH** の対象) とする。

$E = \beta\mathbb{N}$  を  $\mathbb{N}$  の Stone-Čechコンパクト化 (これは  $S$  の Gleason被覆であり **ExtrDCH** の対象) とする。

$p: \beta\mathbb{N} \rightarrow S$  を、 $\mathbb{N}$  上では恒等写像、成長部 ( $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$ ) のすべての点を  $\infty$  に潰す写像とする。

ここで、 $X = \beta\mathbb{N} \in \mathbf{ExtrDCH}$  とし、 $f: X \rightarrow S$  をすべての点を  $\infty$  に写す定数写像とする。このとき、 $p(g(x)) = f(x) = \infty$  を満たすためには、持ち上げ  $g$  の像がすべて成長部  $\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$  に含まれていれば十分である。成長部から任意の1点  $y_0$  を選び、 $g(x) = y_0$  (定数写像) とすれば、これは連続写像であり  $p \circ g = f$  を満たす。 $y_0$  の選び方は連続体濃度以上存在するため、リフト  $g$  は一意から程遠い。

## 4.2 代数側からの根拠: Gaifman-Halesの定理

幾何側の「リフトの一意性の破綻」は、代数側から見ると極めて自然な帰結である。もしリフト  $g$  が常に一意に定まると仮定すると、圏論的には **ExtrDCH** が **TotDCH** の余反射的部分圏であることを意味し、その双対として「完備Boole代数の圏 **cBA** が、Boole代数の圏 **Bool** の反射的部分圏である」ことになる。すなわち、任意のBoole代数に対して普遍性を持つ「自由完備Boole代数」が構成できなければならない。

しかし、1964年の **Gaifman-Halesの定理** により、「無限生成の自由完備Boole代数は存在しない (要素が真クラスになってしまう)」ことが証明されている。したがって、普遍的な反射的完備化は存在せず、ゆえに空間側のリフトの一意性も破綻するのである。

### MacNeille完備化との関係

Gleason被覆  $p: E \rightarrow S$  は、代数側におけるデデキント・カットの一般化である **MacNeille完備化**  $B \rightarrow \bar{B}$  に対応している。

MacNeille完備化は既存の上限・下限を厳密に保存する美しい代数的一意性 (同型を除いて一意) を持つが、「準同型写像を普遍的に一意拡張する特性」は持っていない。対象レベルの完備化は一意に定まるが、写像 (射) の拡張まで含めた関手性 (普遍性) を要求すると完璧な完備化は存在しないという、Boole代数の深遠な性質がここに現れています。

## 5. 空間の射と代数の射の完全な対応

Stone双対性を連続写像だけでなく、「連続開写像」に制限したとき、代数側でどのような性質が対応するかを整理したものが以下の対応表である。

圏 (空間側)	対象の位相的性質	制限された射 (空間側)	双対となる代数側の射の性質
	極大不連結 (極值的非連結) コンパクト		完備準同型写像 (Complete)

<b>ExtrDCHO</b>	Hausdorff空間	連続開写像	<b>Homomorphism)</b> 任意個の $\wedge, \vee$ を厳密に保存する。
<b>TotDCHO</b>	完全不連結コンパクトHausdorff空間 (Stone空間)	連続開写像	<b>随伴準同型写像 (Adjoint / Open Homomorphism)</b> 半順序として左随伴写像 $\exists_h$ を持つ。

### 随伴準同型とフロベニウスの相互律

**TotDCHO** において、連続写像  $f: X \rightarrow Y$  が開写像であることは、代数側の準同型  $h: B \rightarrow A$  ( $h(V) = f^{-1}(V)$ ) が、半順序集合として左随伴  $\exists_h: A \rightarrow B$  を持つことと同値である。

$$\exists_h(a) \leq b \iff a \leq h(b) \quad (\forall a \in A, \forall b \in B)$$

この左随伴  $\exists_h$  は幾何学的には「開閉集合の  $f$  による像  $f(U)$ 」そのものであり、論理学における存在限量子 ( $\exists$ ) の代数的抽象化に相当する。これは次の**フロベニウスの相互律 (Frobenius Reciprocity)** を満たす。

$$\exists_h(a \wedge h(b)) = \exists_h(a) \wedge b$$

完備Boole代数 (**ExtrDCHO**) では、代数側がすでに完備であるため、「任意の上限を保存する」という条件だけで自動的に左随伴の存在が保証されますが、一般のBoole代数 (**TotDCHO**) では上限が不足しているため、「実際に像を代数内に拾ってこれる左随伴が存在する」という強い条件 (開準同型) が必要になります。

## 6. ExtrDCH(O) におけるファイバー積の非存在

驚くべきことに、極大不連結空間と連続開写像の圏 **ExtrDCHO** (および連続写像の圏 **ExtrDCH**) には、一般に**ファイバー積 (引き戻し / pullback)** が存在しない。この崩壊は幾何・代数の双方から説明される。

### 6.1 トポロジー側の視点：直積の崩壊

ファイバー積が存在するための最低条件として、終対象 (1点空間) 上のファイバー積である「直積 (二項積)」が存在しなければならない。しかし、位相幾何学における有名な**Frolík (フロリク) の定理**により、「**2つの無限極大不連結コンパクトHausdorff空間の位相的な直積空間は、決して極大不連結にならない**」ことが知られている。

「ならば直積空間をStonean化 (極大不連結化) すれば圏論的直積ができるのでは？」という着想が浮かびますが、**ExtrDCHO** の射は連続開写像に制限されているため、極大不連結化された空間から元の空間への自然な射影が開写像であることを保証できず、普遍性を満たす対象を圏内に構成できません。

### 6.2 代数側の視点：cBAにおける余積の欠如

Stone双対性により、空間側でファイバー積 (引き戻し) を持つことは、代数側 **cBA** において押し出し (Pushout) や余積 (Coproduct) を持つことと等価である。しかし、完備Boole代数の圏 **cBA** は一般に余積を持たない。強制法などで用いられる正則開集合代数  $RO(A \times B)$  が擬似的な余積の候補となるが、対象となる代数が「完全分配的 (completely distributive)」という極めて厳しい条件を満たさない限り、無限個の上限を完全に保存する準同型写像を普遍性に基づいて構成することは不可能なケース (測度代数など) が存在する。

## TotDCHO との鮮やかな対比

一般のStone空間の圏 **TotDCHO** では、位相空間としての引き戻し  $X \times_Z Y$  が再びStone空間となり、かつ「連続開写像の引き戻しは再び連続開写像になる」というトポロジーの一般定理が効くため、**ファイバー積が普通に存在します**。**ExtrDCH(O)** でこれが失敗するのは、空間に極大不連結性という「強固な剛性」を要求した代償として、代数側が「任意個の上限を厳密に保存せよ」という厳しすぎる制約を背負ってしまい、柔軟な構成（引き戻し）を許容しなくなるためです。

## 7. ファイバー積を用いない層の定義（Sieveの魔術）

多くの教科書では、被覆開集合の有限交差、すなわちファイバー積  $X_i \times_X X_j$  を用いて、プレ層  $F$  が層であるための等化子図式（Equalizer）を以下のように記述する。

$$F(X) \longrightarrow \prod_i F(X_i) \rightrightarrows \prod_{i,j} F(X_i \times_X X_j)$$

しかし、これはファイバー積の存在を前提とした「プレトポロジー」による簡易的な定義にすぎない。**ExtrDCHO** のように**ファイバー積が存在しない圏であっても、層の概念は完全に、かつ厳密にウェルディファインドに定義可能である**。これこそがGrothendieckの極めてエレガントな洞察である。

### 定義 7.1: ファイバー積を用いない層（しらみつぶしアプローチ）

$\mathcal{C}$  を（ファイバー積を持たなくてもよい）任意の圏、 $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  とし、 $\mathcal{U} = \{f_i : X_i \rightarrow X\}_{i \in I}$  を  $X$  の被覆族とする。反変関手（プレ層） $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{Set}$  が被覆族  $\mathcal{U}$  に対する**層 (Sheaf)** であるとは、各  $X_i$  上の局所セクションの族  $(s_i)_{i \in I}$  ( $s_i \in F(X_i)$ ) が、次の**適合性条件**：

任意のテスト対象  $Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  と、任意の射のペア  $g : Y \rightarrow X_i, h : Y \rightarrow X_j$  について、

$$f_i \circ g = f_j \circ h$$

が  $\mathcal{C}$  において成立する（= $Y$  から  $X$  への2つの合成ルートが一致する）ならば、常に  $F(Y)$  においてデータの引き戻しが一致する：

$$F(g)(s_i) = F(h)(s_j)$$

を満たすときにはいつでも、ただ1つの大域的セクション  $s \in F(X)$  が一意に存在して、すべての  $i \in I$  について、

$$F(f_i)(s) = s_i$$

を満たすことである。図式で表せば、以下の制限された射のすべてにわたるしらみつぶしのチェックに相当する。

$$F(X) \longrightarrow \prod_i F(X_i) \rightrightarrows \prod_{\substack{f_i \circ g = f_j \circ h \\ g: Y \rightarrow X_i, h: Y \rightarrow X_j}} F(Y)$$

ファイバー積がある圏では、2つのパーツの重なりを代表する「1つの空間  $X_i \times_X X_j$ 」の上だけでデータの一致を見れば十分でした。しかし代表空間がない圏では、「その重なりの中継地点となり得る、ありとあらゆるテスト空間  $Y$  と写像のペア」をすべて集めてきて、そのすべての上で矛盾がないかをチェックします。ファイバー積が存在するとき、この2つのアプローチは普遍性によって完全に同値となります。

## 8. 基底変換（ベースチェンジ）の安定性とトポロジー的救済

Grothendieckトポロジーを名乗るための絶対ルールである「基底変換の安定性」（被覆を任意の射  $g: Y \rightarrow X$  で引き戻したものが、再び  $Y$  の被覆をなすこと）。ファイバー積が存在しない  $\mathbf{ExtrDCH}(\mathbf{O})$  において、なぜこの公理がクリアできるのだろうか。

### 8.1 $\mathbf{ExtrDCH}$ での解決：Gleason被覆の掛け替え

極大不連結空間の圏  $\mathbf{ExtrDCH}$  において、有限被覆  $\{f_i: X_i \rightarrow X\}$  と任意の射  $g: Y \rightarrow X$  を考える。ファイバー積がないため直接引き戻せないが、トポロジーの力を借りて代用品を圏内に調達する。

- 一瞬だけ、コンパクトHausdorff空間の広い圏  $\mathbf{CH}$  に出る。 $\mathbf{CH}$  の中であれば、位相的なファイバー積  $P_i = X_i \times_X Y$  はいつでも綺麗に作ることができ、元の写像が全射であれば  $\{P_i \rightarrow Y\}$  も  $Y$  を覆う。
- しかし、こうして作った  $P_i$  は極大不連結ではないため、元の圏の住人ではない。
- ここで**Gleason被覆の定理**を発動する。どんなコンパクトHausdorff空間  $P_i$  に対しても、それを連続全射で上から踏み潰せる極大不連結空間  $\widetilde{P}_i$  が絶対に存在する。
- この  $\widetilde{P}_i$  は  $\mathbf{ExtrDCH}$  の住人であり、合成射  $\widetilde{P}_i \rightarrow P_i \rightarrow Y$  は全射の合成なので、やはり  $Y$  全体を覆う全射となる。

これによって、「完璧な代表空間（ファイバー積）はなくても、それを上からさらに覆ってくれる極大不連結な代用品のセット」が常に調達できるため、基底変換公理を完璧にクリアできる。

### 8.2 $\mathbf{ExtrDCHO}$ での解決と凝縮数学 (Condensed Mathematics)

射を開写像に制限した  $\mathbf{ExtrDCHO}$  でも戦略は同様である。一般的なトポロジーの定理「開写像の位相的引き戻しは、再び開写像になる」という性質により、広い世界  $\mathbf{CH}$  で作った位相的ファイバー積からの射影  $P_i \rightarrow Y$  も自動的に開写像となる。このとき、Gleason被覆  $\widetilde{P}_i \rightarrow P_i$  を合成した射も開写像としての性質を失わないため、引き戻し先で像が全体を覆う連続開写像の有限族をきちんと構成できる。

#### 近年の現代数学（凝縮数学）との繋がり

ファイバー積はないものの、Gleason被覆（極大不連結空間）が開写像の引き戻しを綺麗に覆ってくれるというこの絶妙な性質こそが、近年のフィールズ賞数学者ピーター・ショルツ（Peter Scholze）らによる「凝縮数学 (Condensed Mathematics)」の土台となっています。彼らは扱いづらい一般の位相空間を、この  $\mathbf{ExtrDCH}$  や  $\mathbf{ExtrDCHO}$  のような「極大不連結コンパクトHausdorff空間のなすサイト」の上の層（凝縮集合）として再定義することで、近代数学の数々の難問を解き明かしています。

## 9. 4つの概念の決定的な対比：プレトポロジー vs トポロジー

Grothendieckトポロジーにおける「プレトポロジー（被覆族）」と「トポロジー（Sieve）」の本質的な違い、そして「具体的な開集合の圏」から「一般の圏」への抽象化の動機を以下の表にまとめる。

概念	舞台となる環境	表現するものの本質	メリット	デメリット / 適用限界
(1) プレトポ	通常の位相			

ロジック (開集合の圏)	空間の開集合の圏 $\mathcal{O}(X)$	必要最小限の開集合のパーツのリスト (例: $\mathbb{R}$ を2つの開区間で覆う)	極めて直感的であり、具体的計算が容易。	「どのリストを被覆として選ぶか」という人為的選択に依存し、一意性に欠ける。
(2) トポロジー / Sieve (開集合の圏)	通常の位相空間の開集合の圏 $\mathcal{O}(X)$	指定したリストに含まれる開集合に包まれる、全開集合の網羅的コレクション (下方閉集合)	人為的な選択のブレを吸収し、トポロジーの情報を一意に決定できる。	冗長であり、パズルのような直感的な幾何イメージからは少し離れる。
(3) プレトポロジー (一般の圏)	ファイバー積が存在する一般の圏 $\mathcal{C}$	射の族 $\{X_i \rightarrow X\}$ による直感的な被覆公理 (基底変換にファイバー積を陽に使う)	幾何学的な「空間の重なり」のイメージをそのまま圏論に持ち込める。	<b>ExtrDCHO</b> のように、ファイバー積が欠落している圏には一切適用できない。
(4) トポロジー / Sieve (一般の圏)	あらゆる一般の圏 $\mathcal{C}$ (ファイバー積不問)	射の右からの合成 $(h \circ g)$ のみによって被覆と引き戻しを完全代数化した公理	ファイバー積がなくても「引き戻し (共通部分)」を評価可能。極めて汎用性が高い。	抽象度が非常に高く、概念のインフラとしての理解にとっつきにくさがある。

数学が (1) → (3) へと幾何学の一般化を推し進めた際、「ファイバー積がない圏では被覆の重なりが定義できない」という巨大な壁にぶつかりました。それを破壊し、どんな剛構造の圏の上にもトポロジーを花咲かせるために、対象を網羅的に捉える (2) → (4) の「Sieve (ふるい)」の概念がGrothendieckによって発明されたのです。数理の歴史における極めて美しい跳躍がここにあります。

## 参考文献

- Mac Lane, S., & Moerdijk, I. (1992). *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. Springer-Verlag. [\[Springer Link\]](#)  
核とGrothendieck位相の対応、およびLawvere-Tierney位相やSieveを用いた層の基礎を記述した、トポス理論における世界最高の標準的教科書。
- Johnstone, P. T. (1982). *Stone Spaces*. Cambridge University Press. [\[nLab Reference\]](#)  
Stone双対性、Gleason被覆、完備Boole代数の限界、およびMacNeille完備化の性質について、位相空間論と代数論理の両面から極めて深く掘り下げた不朽の名著。
- Clausen, D., & Scholze, P. (2020). *Lectures on Condensed Mathematics*. Master Course, University of Bonn. [\[Bonn University PDF\]](#)  
極大不連結空間 (Stonean空間) の圏の上の開写像・有限像被覆からなる層 (凝縮集合) を用いて現代幾何学を再構築する、近年の革新的先端数理の講義録。